УДК 517.392

И. В. Бойков, А. И. Бойкова, М. А. Сёмов

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Аннотация.

Актуальность и цели. Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений являются активно развивающимся направлением вычислительной математики. Это связано с многочисленными приложениями гиперсингулярных интегральных уравнений в аэродинамике, электродинамике, физике и с тем обстоятельством, что аналитические решения гиперсингулярных интегральных уравнений возможны лишь в исключительных случаях. Помимо непосредственных приложений в физике и технике, гиперсингулярные интегральные уравнения первого рода возникают при приближенном решении граничных задач математической физики. В настоящее время отсутствуют обоснования численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений при различных особенностях на концах сегмента [–1,1], на котором задано уравнение. В данной работе предложен и обоснован метод механических квадратур решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода при всех возможных особенностях на концах сегмента [–1,1].

Материалы и методы. В работе используются методы функционального анализа и теории приближения. Рассмотрены три известные класса решений гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода: класс решений, обращающихся в нуль на обоих концах сегмента [–1,1]; класс решений, обращающихся в бесконечность на обоих концах сегмента [–1,1]; класс решений обращающийся в нуль на одном конце сегмента [–1,1] и в бесконечность на другом. Приближенные решения уравнений ищутся в виде полиномов Чебышева первого и второго рода, а обоснование метода механических квадратур проводится на основе общей теории приближенных методов.

Результаты. Построены три вычислительные схемы решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода. Каждая вычислительная схема предназначена для решения гиперсингулярного интегрального уравнения с заранее заданными особенностями решений на концах сегмента [–1,1]. В работе получены оценки быстроты сходимости и погрешности методов.

Выводы. Построены и обоснованы вычислительные схемы приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода, определенных на сегменте [–1,1]. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач аэродинамики (уравнение конечного крыла), электродинамики (дифракция на различных экранах), гидродинамики (теория подводного крыла), при решении уравнений математической физики методом граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения первого рода, метод механических квадратур.

I. V. Boykov, A. I. Boykova, M. A. Semov

APPROXIMATE SOLUTION OF HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF FIRST KIND

Abstract.

Background. Approximate methods of hypersingular integral equations solution are an actively developing field of calculus mathematics. It is associated with multiple applications of hypersingular integral equations in aerodynamics, electrodynamics, physics and with a circumstance, when analytical solutions of hypersingular integral equations are possible only in exceptional cases. Besides direct applications in physics and engineering, hypersingular integral equations of first kind occur at approximate solution of boundary problems of mathematical physics. At the present time there are no substantiations of numerical methods of hypersingular integral equations solution at various features on ends of a segment, on which an equation is set up. The present work suggests and substantiates a method of mechanical quadratures of solution of hypersingular integral equations of first kind at all possible features on ends of the segment [–1,1].

Materials and methods. The research included the methods of functional analysis and approximation theory. The authors considered three known classes of solution of hypersingular integral equations of first kind: a class of solutions that turn to zero on both ends of the segment [–1,1]; a class of solutions that turn to infinity on both ends of the segment [–1,1]; a class of solutions that turn to zero on one end of the segment [–1,1] and to infinity on another. Approximate solutions of equations are sought in the forms of Chebyshev's polynomials of first and second kinds, and the method of mechanical quadratures is substantiated on the basis of the general theory of approximate methods.

Results. The authors have built three computing circuits for solving hypersingular integral equations of first kind. Each computing circuit has been designed for solving hypersingular integral equations with preset features of solutions on ends of the segment [–1,1]. The work describes estimates of the methods' rapidity of converegence and errors.

Conclusions. The authors have built and substantiated computing circuits for approximate solution of hypersingular integral equations of first kind, determined on the segment [–1,1]. The obtained results may be used in solving problems of aerodynamics (finite wing equations), electrodynamics (diffraction on various screens), hydrodynamics (hydrofoil theory), in solving mathematical physics equations by the method of boundary integral equations.

Key words: hypersingular integral equations of first kind, method of mechanical quadratures.

Введение

Методы конечных и граничных элементов являются наиболее широко используемыми методами в механике, аэродинамике и других областях физики и техники. Альтернативой этим методам является метод граничных интегральных уравнений, позволяющий на порядок уменьшить размерность исходной задачи. Применение метода граничных интегральных уравнений к задачам механики разрушения, механики композитных материалов, аэродинамики, электродинамики [1–15] приводит к гиперсингулярным интегральным уравнениям первого рода:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \qquad (1)$$

Здесь $h(t,\tau)$ – известное ядро, $f(t)$ – известная правая часть. Неизвестная функция $x(t)$ подлежит определению.

Приближенным методам решения уравнений вида (1) посвящено большое число работ, в которых предлагаются и исследуются различные методы.

В работах [1, 4, 8, 11–14, 16] рассмотрено применение проекционных методов к приближенному решению уравнений вида (1) в предположении, что $x(\pm 1)=0$.

В данной работе предложены вычислительные схемы приближенного решения уравнений вида (1) в предположении, что:

а) $x(\pm 1)=0$;

б) $x(\pm 1)=\infty$;

в) $x(1)=\infty$, $x(-1)=0$ или $x(-1)=\infty$, $x(1)=0$,

и дано их обоснование в весовых пространствах.

1. Приближенный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода на классе функций, обращающихся в нуль на концах интервала интегрирования

Рассмотрим уравнение

$$Kx \equiv \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{2}$$

Рассмотрим случай, когда решение уравнения (2) ищется в классе функций, обращающихся в нуль на концах сегмента $[-1,1]$.

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде функции

$$x_N(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{N} x_k (\gamma_k^{-1} \sum_{i=0}^{N} (i+1)^{-1} \hat{U}_i(\mu_k) \hat{U}_i(t)), \tag{3}$$

где $\hat{U}_i(t)$ – ортонормированные с весом $\sqrt{1-t^2}$ полиномы Чебышева второго рода степени i; x_k – неизвестные значения; μ_k – узлы полинома $\hat{U}_{N+1}(t)$; $\gamma_k = \sum_{l=0}^{N} \hat{U}_i^2(\mu_k)$.

Аппроксимируем функцию $f(t)$ интерполяционным полиномом [11]

$$f_N(t) = \sum_{k=0}^{N} f(\mu_k)(\gamma_k^{-1} \sum_{i=0}^{N} \hat{U}_i(\mu_k) \hat{U}_i(t)).$$

Подставляя $x_N(t)$ и $f_N(t)$ в уравнение (2) и применяя к нему метод коллокации по узлам μ_j, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=0}^{N} x_k \left(-\pi \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^{N} \hat{U}_i(\mu_k) \hat{U}_i(\mu_j) + \int_{-1}^{1} h(\mu_j,\tau) \sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i+1} \hat{U}_i(\mu_k) \hat{U}_i(\tau) d\tau \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} f(\mu_k) \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^{N} \hat{U}_i(\mu_k) \hat{U}_i(\mu_j), \quad j=0,1,\ldots,N. \tag{4}$$

Регулярный интеграл в формуле (4) вычисляем по квадратурной формуле Гаусса.

В результате получаем вычислительную схему метода механических квадратур:

$$-\pi x_j + \sum_{l=0}^{N} \alpha_l h(\mu_j, \mu_l) \sum_{k=0}^{N} \frac{x_k}{\gamma_k} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i+1} \hat{U}_i(\mu_k) \hat{U}_i \mu_l = f(\mu_j), \quad j = 0,1,\ldots,N. \quad (5)$$

Обозначим через X пространство функций вида $x(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функции, имеющие производные первого порядка, удовлетворяющие условию Гельдера H_α, $0 < \alpha \le 1$. Норма в пространстве X определяется формулой

$$\|x(t)\| = \|\varphi(t)\|_{C[-1;1]} + \|d\varphi(t)/dt\|_{C[-1;1]} + \sup_{t_1 \ne t_2} \frac{|\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \; 0 < \beta < \alpha. \quad (6)$$

Через X_N обозначим подпространство пространства X, состоящее из функций $x_N(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi_N(t)$, где $\varphi_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k t^k$ – множество полиномов до N-го порядка. Норма в пространстве X_N определяется формулой (6).

Через Y обозначим пространство непрерывных функций, определенных на сегменте $[-1;1]$, с нормой

$$\|y\| = \max_{-1 \le t \le 1} |y(t)| + \sup_{t_1 \ne t_2} \frac{|y(t_1) - y(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \; 0 < \beta < \alpha.$$

Через Y_N обозначим пространство полиномов вида $y_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k t^k$ с нормой

$$\|y_N(t)\| = \max_{-1 \le t \le 1} |y_N(t)| + \sup_{t_1 \ne t_2} \frac{|y_N(t_1) - y_N(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \; 0 < \beta < \alpha.$$

Через P_N обозначим проектор, действующий из Y в Y_N по формуле $y_N(t) = P_N[y(t)]$, а из пространства X в X_N – по формуле $P_N[x(t)] = P_N\left[\sqrt{1-t^2}\varphi(t)\right] = \sqrt{1-t^2} P_N[\varphi(t)]$. Здесь $P_N[y(t)]$ – оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов степени N по узлам полиномов Чебышева второго рода.

Нетрудно видеть, что оператор K действует из пространства X в пространство Y.

Известно [17], что $\|P_N\| \le CN$, где $C = \text{const}$.

Будем считать, что существует линейный обратный оператор K^{-1}, действующий из Y в X. Отметим, что для дальнейшего построения теории достаточно существование левого или правого обратного оператора.

Вначале применим к уравнению (2) метод коллокации:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x_N(\tau)}{(\tau-\mu_j)^2} d\tau + \int_{-1}^{1} h(\mu_j,\tau) x_N(\tau) d\tau = f(\mu_j), \quad j = 0,1,...,N, \tag{7}$$

где μ_j – узлы полинома Чебышева второго рода $\hat{U}_{N+1}(t)$, $x_N(t) = \sqrt{1-t^2}\psi_N(t)$, $\psi_N(t) = \sum_{k=0}^{N} x_k \left(\gamma_k^{-1} \sum_{i=0}^{N} (i+1)^{-1} \hat{U}_i(\mu_k) \hat{U}_i(t) \right)$.

Представим систему (7) в операторной форме:

$$P_N \left[\int_{-1}^{1} \frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \int_{-1}^{1} h(t,\tau) x_N(\tau) d\tau \right] = P_N[f(t)]. \tag{8}$$

Используя формулу [4]

$$\int_{-1}^{1} \frac{\hat{U}_N(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-t)^2} d\tau = -\pi(n+1)\hat{U}_N(t), \ n \geq 0,$$

перепишем систему (8) в следующем виде:

$$K_N x_N \equiv \int_{-1}^{1} \frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + P_N \left[\int_{-1}^{1} h(t,\tau) x_N(\tau) d\tau \right] = P_N[f(t)]. \tag{9}$$

Оценим норму разности $\left\| \int_{-1}^{1} (h(t,\tau) - h_N^t(t,\tau)) x(\tau) d\tau \right\|$, где $h_N^t(t,\tau)$ – полином наилучшего равномерного приближения степени N функции $h(t,\tau)$ по переменной t.

Очевидно,

$$\left\| \int_{-1}^{1} \left(h(t,\tau) - h_N^t(t,\tau) \right) x(\tau) d\tau \right\|_{C[-1,1]} \leq$$

$$\leq 2 \max \left| h(t,\tau) - h_N^t(t,\tau) \right| \max |x(\tau)| \leq 2 \bar{E}_N^t \left(h(t,\tau) \right) \|x\|,$$

где $\bar{E}_N^t \left(h(t,\tau) \right) = \sup_{-1 \leq \tau \leq 1} E_N^t \left(h(t,\tau) \right)$, $E_N^t \left(h(t,\tau) \right)$ – наилучшее равномерное приближение функции $h(t,\tau)$ (при фиксированном τ) по переменной t полиномами N степени.

Повторяя ход доказательства обратной теоремы Бернштейна [18], можно показать, что

$$\left\| \int_{-1}^{1} \left(h(t,\tau) - h_N^t(t,\tau) \right) x(\tau) d\tau \right\| \leq$$

$$\leq 2 \max \left| h(t,\tau) - h_N^t(t,\tau) \right| \max |x(\tau)| \leq C N^{\beta} \bar{E}_N^t \left(h(t,\tau) \right) \|x\|.$$

Здесь через C обозначены константы, не зависящие от N.

Из общей теории приближенных методов [19] следует, что при N таких, что $q = CN^{\beta}\left\|K^{-1}\right\|\bar{E}_N^t\left(h(t,\tau)\right)\lambda_N < 1$, система уравнений (9) однозначно разрешима, оператор K_N непрерывно обратим и справедлива оценка

$$\left\|x^* - x_N^*\right\| \le CN^{\beta}\left\|K^{-1}\right\|\left(\bar{E}_N^t\left(h(t,\tau)\right)\right)\lambda_N, \tag{10}$$

где x^* и x_N^* – решения уравнений (2) и (9) соответственно, $\lambda_N = \|P_N\|$ – константа Лебега.

Метод механических квадратур решения гиперсингулярного интегрального уравнения (2) в операторной форме имеет вид

$$P_N\left[\int_{-1}^{1}\frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau + \int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}P_N^{\tau}\left[h(t,\tau)\psi_N(\tau)\right]d\tau\right] = P_N[f(t)]. \tag{11}$$

Так как интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau$ является полиномом степени N, то

$$P_N\left[\int_{-1}^{1}\frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau\right] = \int_{-1}^{1}\frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau.$$

Воспользовавшись этим тождеством и свойствами квадратурных формул Гаусса, уравнение (11) представим в виде

$$\bar{K}_N x_N \equiv \int_{-1}^{1}\frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau + P_N\left[\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}P_N\left[h(t,\tau)\right]\psi_N(\tau)d\tau\right] = P_N[f(t)].$$

Оценим норму разности операторов $K_N x_N$ и $\bar{K}_N x_N$ в пространстве Y_N:

$$\left\|K_N x_N - \bar{K}_N x_N\right\|_{C[-1,1]} = \left\|P_N\left[\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\left(h(t,\tau) - P_N^{\tau}\left[h(t,\tau)\right]\right)\psi_N(\tau)d\tau\right]\right\|_{C[-1,1]} \le$$

$$\le \max\left|h(t,\tau) - P_N^{\tau}\left[h(t,\tau)\right]\right|\left|\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\psi_N(\tau)d\tau\right| \le$$

$$\le \max\left|h(t,\tau) - P_N^{\tau}\left[h(t,\tau)\right]\right|\int_{-1}^{1}\left|\psi_N(\tau)\right|d\tau \le$$

$$\le 2\max\left|h(t,\tau) - P_N^{\tau}\left[h(t,\tau)\right]\right|\left\|\psi_N\right\|_{C[-1;1]} \le CE_N^{\tau}(h(t,\tau))(1+\lambda_N)\left\|x_N\right\|.$$

Так как $K_N x_N - \bar{K}_N x_N$ является полином N-го порядка, то из обратной теоремы Бернштейна [18] следует, что

$$\left\|K_N x_N - \bar{K}_N x_N\right\| \le C\bar{E}_N^{\tau}(h(t,\tau))(1+\lambda_N)N^{\beta}\left\|x_N\right\|.$$

Из теоремы Банаха [20] следует, что при N таких, что $q_1 = C\left\|K^{-1}\right\|\bar{E}_N^t\left(h(t,\tau)\right)(1+\lambda_N) < 1$, оператор $\bar{K}_N$ непрерывно обратим и справедлива оценка

$$\left\|x_N^* - \bar{x}_N^*\right\| \le CN^{\beta}\bar{E}_N^{\tau}(h(t,\tau))\lambda_N, \tag{12}$$

где $\bar{x}_N^*$ – решение уравнения (10).

Из оценок (10) и (12) следует, что

$$\left\|x^* - \bar{x}_N^*\right\| \le C\left\|K^{-1}\right\|\left(\bar{E}_N^t\left(h(t,\tau)\right) + \bar{E}_N^{\tau}\left(h(t,\tau)\right)\right)N^{1+\beta}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть оператор K непрерывно обратим, функция $h(t,\tau)$ непрерывно дифференцируема по обеим переменным, функция $f(t)$ непрерывна. Тогда при N таких, что

$$C\left\|K^{-1}\right\|\left(\bar{E}_N^t\left(h(t,\tau)\right) + \bar{E}_N^{\tau}\left(h(t,\tau)\right)\right)N^{1+\beta} < 1,$$

система уравнений (11) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\left\|x^* - \bar{x}_N^*\right\| \le C\left\|K^{-1}\right\|\left(\bar{E}_N^t\left(h(t,\tau)\right) + \bar{E}_N^{\tau}\left(h(t,\tau)\right)\right)N^{1+\beta},$$

где x^* и $\bar{x}_N^*$ – решения уравнений (2) и (11).

Рассмотрим еще одну вычислительную схему приближенного решения уравнения (2) на классе функций, обращающихся в нуль на концах сегмента $[-1,1]$.

Приближенное решение будем искать в виде функции

$$x_N(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi_N(t) = \sqrt{1-t^2}\sum_{k=0}^{N-1} x_k U_k(t).$$

Коэффициенты $\{x_k\}$, $k = 0,1,...,N-1$, определяются из системы алгебраических уравнений, которая в операторной форме имеет вид

$$P_N\left[\int_{-1}^{1}\frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau + \int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}P_N^{\tau}[h(\lambda,\tau)\varphi_N(\tau)]d\tau\right] = P_N[f(t)], \tag{13}$$

где P_N – оператор проектирования из пространства $C[-1,1]$ непрерывных функций на множество интерполяционных полиномов степени N по узлам полиномов Чебышева второго рода. Верхний индекс у оператора P_N^{τ} означает, что интерполяция проводится по переменной τ.

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2.1, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.2. Пусть оператор K непрерывно обратим, функция $h(t,\tau)$ непрерывно дифференцируема по обеим переменным, функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема. Тогда при N таких, что

$$C\left\|K^{-1}\right\|N^{\beta}\left(\tilde{E}_N^{\tau}(h(t,\tau))+\tilde{E}_N^{t}(h(t,\tau))\right)\ln N<1,$$

система уравнений (13) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\left\|x^*-\bar{x}_N^*\right\|\le C\left\|K^{-1}\right\|N^{\beta}(\bar{E}_N^{\tau})(h(t,\tau))+\bar{E}_N^{t})(h(t,\tau)))\ln N,$$

где x^* и $\bar{x}_N^*$ – решения уравнений (2) и (13).

2. Приближенный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода на классе функций, обращающихся в бесконечность на концах интервала интегрирования

Рассмотрим приближенное решение гиперсингулярного интегрального уравнения (2) в предположении, что ищется решение, обращающееся в бесконечность на концах интервала интегрирования.

Обозначим через X пространство функций вида $x(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\varphi(t)$.

Функции $\varphi(t)$ имеют непрерывные производные на $[-1,1]$, удовлетворяющие условию Гельдера H_α с показателем $\alpha, 0<\alpha\le 1$. Норма в пространстве X определяется формулой

$$\|x(t)\|=\|\varphi(t)\|_{C[-1;1]}+\|\varphi'(t)\|_{C[-1;1]}+\sup_{t_1\ne t_2}\frac{|\varphi'(t_1)-\varphi'(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}},\ 0<\beta<\alpha.$$

Через Y обозначим пространство функций вида $y(t)=\frac{1}{1-t^2}\psi(t)$ с нормой

$$\|y(t)\|=\|\psi(t)\|_{C[-1,1]}+\|\psi'(t)\|_{C[-1,1]}+\sup_{t_1\ne t_2}\frac{|\psi'(t_1)-\psi'(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}},\ 0<\beta<\alpha.$$

Через X_N обозначим пространство функций вида $x_N(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\varphi_N(t)$, $\varphi_N(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k t^k$, с нормой

$$\|x_N(t)\|=\|x_N(t)\|_{C[-1,1]}+\|x'_N(t)\|_{C[-1,1]}+\sup_{t_1\ne t_2}\frac{|x'_N(t_1)-x'_N(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}},\ 0<\beta<\alpha.$$

Через Y_N обозначим пространство функций вида $y_N(t)=\frac{1}{1-t^2}\psi_N(t)$, $\psi_N(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k t^k$, с нормой

$$\|y_N(t)\|=\|\psi_N(t)\|_{C[-1,1]}+\sup_{t_1\ne t_2}\frac{|\psi_N(t_1)-\psi_N(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}},\ 0<\beta<\alpha.$$

Будем считать, что оператор K действует из пространства X в Y и имеет правый ограниченный обратный оператор K_r^{-1} действующий из Y в X.

Обозначим через L_N оператор, проектирующий пространство Y на пространство Y_N по формуле

$$L_N[y(t)] = L_N\left[\frac{\psi(t)}{1-t^2}\right] = \frac{1}{1-t^2} L_N[\psi(t)],$$

где $\psi(t) \in C[-1,1]$; $L_N[\psi(t)]$ – оператор, проектирующий непрерывные функции на множество интерполяционных полиномов степени N по узлам полиномов Чебышева первого рода.

Известно [18], что $\|P_N\| \le C \ln N$.

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде функции

$$x_N(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi_N(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \hat{T}_k(t),$$

где $\hat{T}_k(t)$ – ортонормированные с весом $1/\sqrt{1-t^2}$ полиномы Чебышева первого рода.

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, представленной в операторной форме уравнением

$$L_N\left[(1-t^2)\left(\int_{-1}^{1} \frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} L_N^{\tau}[h(t,\tau)\varphi_N(\tau)] d\tau\right)\right] =$$

$$= L_N[(1-t^2) f(t)], \qquad (14)$$

где $L_N[\psi(t)]$, $\psi(t) \in C[-1,1]$ – оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов степени N по узлам полиномов Чебышева первого рода.

Воспользовавшись следующей формулой [4, 8]:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\hat{T}_N(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2 \sqrt{1-\tau^2}} = \begin{cases} 0, \ N = 0,1; \\ \dfrac{\pi}{1-t^2}\left[-\dfrac{n-1}{2}\hat{U}_N(t) + \dfrac{n+1}{2}\hat{U}_{N-2}(t)\right], \ N = 2,3,\ldots, \end{cases}$$

и квадратурной формулой Гаусса, уравнение (14) можно представить в виде

$$K_N x_N \equiv (1-t^2) \int_{-1}^{1} \frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2} + L_N^t\left((1-t^2) \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} L_N^{\tau}[h(t,\tau)] \phi_N(\tau) d\tau\right) =$$

$$= L_N[(1-t^2) f(t)]. \qquad (15)$$

Покажем, что при N таких, что

$$q = C\left\|\bar{K}_r^{-1}\right\| N^{\beta} (\bar{E}_N^t(h(t,\tau)) + \bar{E}_N^{\tau}(h(t,\tau))) \ln N < 1,$$

система уравнений (15) имеет единственное решение x_N^* и справедлива оценка

$$\left\|x^*(t)-x_N^*\right\|\le CN^\beta\left\|\bar{K}_r^{-1}\right\|\left(\bar{E}_N^t(h(t,\tau))+\bar{E}_N^\tau(h(t,\tau))\right)\ln N,$$

где $x^*(t)$ – решение уравнения (2).

Вначале проведем обоснование метода коллокации для уравнения (2). Метод коллокации в операторной форме имеет вид

$$\bar{K}_N x_N\equiv(1-t^2)\int_{-1}^{1}\frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau+$$

$$+L_N^t\left[(1-t^2)\int_{-1}^{1}h(t,\tau)x_N(\tau)d\tau\right]=L_N^t[(1-t^2)f(t)]. \qquad (16)$$

Оценим норму разности

$$\left\|Kx_N-\bar{K}_N x_N\right\|=\left\|(1-t^2)\int_{-1}^{1}h(t,\tau)x_N(\tau)d\tau-L_N^t\left[(1-t^2)\int_{-1}^{1}h(t,\tau)x_N(\tau)d\tau\right]\right\|\le$$

$$\le\left\|(1-t^2)\int_{-1}^{1}(h(t,\tau)-h_N^t(t,\tau))x_N(\tau)d\tau\right\|+$$

$$+\left\|L_N^t\left[(1-t^2)\int_{-1}^{1}(h(t,\tau)-h_N^t(t,\tau))x_N(\tau)d\tau\right]\right\|=I_1+I_2,$$

где $h_N^t(t,\tau)$ – полином наилучшего равномерного приближения степени $(N-2)$ по переменной t к функции $h(t,\tau)$.

Нетрудно видеть, что

$$I_1\le CN^\beta\bar{E}_{N-2}^t(h(t,\tau))\left\|x_N\right\|;$$

$$I_2\le CN^\beta\left\|L_N\right\|\bar{E}_{N-2}^t(h(t,\tau))\left\|x_N\right\|,$$

и, следовательно,

$$\left\|Kx_N-\bar{K}_N x_N\right\|\le CN^\beta\left\|L_N\right\|\bar{E}_{N-2}^t(h(t,\tau))\left\|x_N\right\|,$$

здесь $\bar{E}_N^t(h(t,\tau))=\max\limits_{1\le\tau\le1}\bar{E}_N^t(h(t,\tau))$.

Из последнего неравенства и общей теории приближенных методов для обратимых справа операторов [21] следует, что при N таких, что $q<1$, существует правый обратный оператор $\bar{K}_{N,r}$ с нормой $\left\|\bar{K}_{N,r}^{-1}\right\|\le\frac{K_r^{-1}}{1-q}$. Здесь

$q = CN^{\beta} K_r^{-1} \| L_N \| \bar{E}_{N-2}^t (h(t,\tau))$ Так как оператор $\bar{K}_N$ – конечномерный, то существует линейный обратный оператор $\bar{K}_N^{-1}$ с той же нормой.

Оценим норму разности $\| \bar{K}_N - K_N \|$.

Очевидно,

$$\| \bar{K}_N x_N - K_N x_N \| = \left\| L_N^t \left[(1-t^2) \int_{-1}^{1} (h(t,\tau) - L_N^{\tau}[h(t,\tau]) x_N(\tau) d\tau \right] \right\| \le$$

$$\le CN^{\beta} \| L_N \| \bar{E}_N^{\tau} (h(t,\tau)) \| x_N \|, \tag{17}$$

где $\bar{E}_N^{\tau} = \max\limits_{-1 \le t \le 1} E_N^{\tau}(h(t,\tau))$.

Пусть существует такое N_{**}, что при $N \ge N_{**}$ выполняется неравенство

$$CN^{\beta} \left\| \bar{K}_N^{-1} \right\| \| L_N \| \bar{E}_N^{\tau} (h(t,\tau)) < 1.$$

Из теоремы Банаха [20] следует, что

$$\left\| x^* - x_N^* \right\| \le CN^{\beta} (\| L_N \| \bar{E}_N^t (h(t,\tau)) + \| L_N \| \bar{E}_N^{\tau} (h(t,\tau)),$$

где x^* и x_N^* – решения уравнений (2) и (15) соответственно.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть оператор K обратим справа, функция $h(t,\tau)$ непрерывна по обеим переменным, функция $f(t)$ непрерывна. Тогда при N таких, что

$$CN^{\beta} \left\| K^{-1} \right\| \left(\bar{E}_N^{\tau} \left(h(t,\tau) \right) + \bar{E}_N^{\tau} \left(h(t,\tau) \right) \right) \ln N < 1,$$

система уравнений (14) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\left\| x_N^* - \bar{x}_N^* \right\| \le CN^{\beta} \left\| K^{-1} \right\| \left(\bar{E}_N^{\tau} \left(h(t,\tau) \right) + \bar{E}_N^{\tau} \left(h(t,\tau) \right) \right) \ln N,$$

где x^* и x_N^* – решения уравнений (2) и (14).

Замечание. Так как

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tau^k}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{(\tau - t)^2} = 0, \ k = 0,1,$$

то при решении уравнения

$$\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t), \ -1 < t < 1,$$

необходимо располагать дополнительной информацией в виде двух функционалов от решения.

3. Приближенный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода на классе функций с весовым коэффициентом $((1 \pm t)/(1 \mp t))^{1/2}$

В данном разделе исследуется приближенный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений вида (2) в предположении, что решение ищется в классе функций, имеющих весовые множители $\omega(t) = ((1 \pm t)/(1 \mp t))^{1/2}$.

Для определенности будем считать, что $\omega(t) = ((1-t)/(1+t))^{1/2}$.

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде функции

$$x_N(t) = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \sum_{k=0}^{N} x_k \hat{T}_k(t),$$

где $\hat{T}_k(t)$, $k = 0,1,\ldots,N$, – полиномы Чебышева первого рода, ортонормированные с весом $(1-x^2)^{-1/2}$.

Прежде чем приступать к построению вычислительной схемы, преобразуем интеграл

$$I(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \frac{\hat{T}_n(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau.$$

Обозначим через $T_n(t)$ полиномы Чебышева первого рода $T_n(t) = \cos n(\arccos t)$.

Известна [22] следующая рекуррентная формула

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n = 1,2,\ldots,$$

где $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$.

Полиномы $\hat{T}_n(t)$ и $T_n(t)$ связаны формулами [22]:

$$\hat{T}_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(t), \quad n = 1,2,\ldots;$$

$$\hat{T}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

отсюда

$$\hat{T}_{n+1}(t) = 2t\hat{T}_n(t) - \hat{T}_{n-1}(t), \quad n = 2,3,\ldots,$$

$$\hat{T}_2(t) = 2t\hat{T}_1(t) - \sqrt{2}\hat{T}_0(t),$$

тогда

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \left(\sum_{k=0}^{N} x_k \hat{T}_k(\tau)\right) \frac{d\tau}{(\tau - t)^2} = \int_{-1}^{1} \frac{1-\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\sum_{k=0}^{N} x_k \hat{T}_k(\tau)\right) \frac{d\tau}{(\tau - t)^2} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} (\sum_{k=0}^{N} x_k \hat{T}_k(\tau)) \frac{d\tau}{(\tau-t)^2} - \int_{-1}^{1} \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} (\sum_{k=0}^{N} x_k \hat{T}_k(\tau)) \frac{d\tau}{(\tau-t)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} x_k \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \hat{T}_k(\tau) \frac{d\tau}{(\tau-t)^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} x_k \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \hat{T}_{k+1}(\tau) \frac{d\tau}{(\tau-t)^2} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{N} x_k \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \hat{T}_{k-1}(\tau) \frac{d\tau}{(\tau-t)^2} - x_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \hat{T}_0(\tau) \frac{d\tau}{(\tau-t)^2} -$$

$$- \frac{x_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{(\tau-t)^2}.$$

Известны [4, 8] формулы:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\hat{T}_n(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)^2} = \begin{cases} 0, n = 1, 2, \ldots; \\ \frac{\pi}{1-t^2} \left(-\frac{n-1}{2} \hat{U}_n(t) + \frac{n+1}{2} \hat{U}_{n-2}(t) \right), n = 3, 4, \ldots, \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tau^n d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)^2} = \begin{cases} 0, n = 0, 1, \ldots; \\ \pi \sum_{l=0}^{n-2} e_k^n t^k, k = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

где

$$e_k^n = \begin{cases} 0, \quad n-k = 2m+1, \\ \frac{(k+1)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}, \quad n-k = 2m, \end{cases}$$

$m = 1, 2, \ldots, \Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Следовательно,

$$I(t) = \frac{1}{1-t^2} \left[\sum_{k=2}^{N} x_k \left(-\frac{k-1}{2} \hat{U}_k(t) + \frac{k+1}{2} \hat{U}_{k-2}(t) \right) - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} x_k \left(-\frac{k}{2} \hat{U}_{k+1}(t) + \frac{k+2}{2} \hat{U}_{k-1}(t) \right) -$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{N} x_k \left(-\frac{k-2}{2} \hat{U}_{k-1}(t) + \frac{k}{2} \hat{U}_{k-3}(t) \right) \right] = \frac{1}{1-t^2} I_1(t).$$

Таким образом, $I_1(t)$ является полиномом $(N+1)$ степени, зависящим от N неизвестных параметров x_k, $k = 1, \ldots, N$.

Подставим функцию $x_N(t)$ в уравнение (2), приравняем левые и правые части в N узле μ_k, $k=1,2,\ldots,N+1$, являющемся корнями полинома Чебышева первого рода степени $(N+1)$ и вычислим регулярный интеграл по квадратурной формуле Гаусса.

В результате получаем следующую систему уравнений:

$$I(\mu_k)+\sum_{i=0}^{N}\alpha_i h(\mu_k,v_i)\sum_{j=0}^{N}x_j\hat{T}_j(v_i)=f(\mu_k), k=1,\ldots,N+1. \tag{18}$$

Здесь α_i и v_i, $i=1,\ldots,N+1$, – коэффициенты и узлы квадратурной формулы Гаусса с весом $\sqrt{(1-t)/(1+t)}$.

Замечание. Корни полинома Чебышева первого рода выбраны в качестве узлов метода коллокации, так как они имеют наименьшую константу Лебега.

Система (18) имеет размерность $(N+1)\times(N+1)$, для ее решения применим стандартные численные методы.

Рассмотрим случай характеристического уравнения, моделирующего ряд задач аэродинамики [1]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau=f(t). \tag{19}$$

Решение уравнения будем искать в виде функции

$$x_N(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\sum_{k=0}^{n}x_k\widehat{T}_k(t).$$

Подставив функцию $x_N(t)$ в левую часть уравнения (19), имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau=I(t)=\frac{1}{1-t^2}I_1(t),$$

$I_1(t)$ является полиномом $(N+1)$ степени, зависящим от N неизвестных коэффициентов x_k, $k=1,2,...,N$, причем слагаемые с коэффициентом x_0 в выражение $I_1(t)$ не входят. Для нахождения коэффициента x_0 необходимо ввести дополнительное условие на решение. В качестве дополнительного условия можно положить

$$\int_{-1}^{1}|x(\tau)|\,d\tau=\gamma,\ \ \gamma=\text{const}.$$

Тогда метод коллокации для решения уравнения (19) имеет вид

$$I(\mu_k)+\sum_{i=0}^{N}\alpha_i h(\mu_k,v_i)\sum_{j=0}^{N}x_j\hat{T}_j(v_i)=f(\mu_k),\ \ k=1,\ldots,N;$$

$$\int_{-1}^{1} |x_N(\tau)| d\tau = \gamma. \qquad (20)$$

Система (20) имеет размерность $(N+1)\times(N+1)$ и к ней применимы стандартные численные методы.

Список литературы

1. **Лифанов, И. К.** Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов. – М. : Янус, 1995. – 520 с.
2. **Вайникко, Г. М.** Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – М. : Янус-К, 2001. – 508 с.
3. **Erdogan, F.** Numerical solution of singular integral equations / F. Erdogan, G. D. Gupta, T. S. Cook // Mechanics of Noordhoff / G. G. Sih (Ed.). – 1973. – Vol. 1. – P. 368–425.
4. **Kaya, A. C.** On the solution of integral equations with strongly singular kernels / A. C. Kaya, F. Erdogan // Quart. Appl. Math. – 1987. – Vol. 45 (1). – P. 105–122.
5. **Martin, P. A.** On boundary integral equations for crack problems / P. A. Martin, F. J. Rizzo // Proc. R. Soc. A421. – 5th ed. – London, 1989. – P. 341–355.
6. **Martin P. A.** End – point behaviur of solutions to hypersingular integral equations / P. A. Martin // Proc. R. Soc. A432. – London, 1991. – P. 301–320.
7. **Schulze, G. W.** Periodic cracking of elastic coatings / G. W. Schulze, F. Erdogan // J. Solids. Struct. – 1998. – Vol. 35(28–29). – P. 3615–3634.
8. **Chan, Y.-S.** Integral equations with hypersingular kernels-theory and applications to fracture mechanics / Y.-S. Chan, A. C. Fannjiang, G. H. Paulino // International Journal of Engineering Science. – 2003. – Vol. 41. – P. 683–720.
9. **Gil, A.** On a hypersingular equations of a problem for a crack in elastic media / A. Gil, S. Samko // Fraction Calculus and Applied Analysis. – 2010. – Vol. 13, № 1. – P. 1–8.
10. **Samko, S.** On a 3D-Hypersingular equation of a problem for a crack / S. Samko // Fraction Calculus and Applied Analysis. – 2011. – Vol. 14, № 1. – P. 20–32.
11. **Бойкова, А. И.** Об одном классе интерполяционных полиномов / А. И. Бойкова // Оптимальные методы вычислений и их применение. – Пенза : Изд-во ПензГТУ, 1996. – С. 141–148.
12. **Mahiub, M. A.** Numerical solution of hypersingular integral equations / M. A. Mahiub, N. M. A. Nik Long, Z. K. Eshkuvatov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 69, № 3. – P. 265–274.
13. **Mandal, B. N.** Applied Singular Integral Equations / B. N. Mandal, A. Chalrabarti // CRC Press. Science Publishers. – Enfield : New Hampshire, USA, 2011. – 264 p.
14. **Feng, H.** Numerical solution of a certain hypersingular equation of the first kind / H. Feng, X. Zhang, J. Li // BIT Numer. Math. – 2011. – Vol. 51. – P. 609–630.
15. **Сизиков, В. С.** Обобщенный метод квадратур решения сингулярного интегрального уравнения и вычисления сингулярных интегралов / В. С. Сизиков // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. IX Междунар. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – С. 48–54.
16. **Хубеджи, Ш. С.** О численном решении гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода / Ш. С. Хубеджи // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем (20–22 мая 2015 г.) : сб. ст. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. – С. 134–138.
17. **Сеге, Г.** Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М. : ГИФМЛ, 1962. – 500 с.

18. **Натансон, И. П.** Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М. ; Л. : ГИФМЛ, 1949. – 688 с.
19. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 750 с.
20. **Люстерник, Л. А.** Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 540 с.
21. **Бойков, И. В.** Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. – 316 с.
22. **Суетин, П. К.** Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – М. : Наука, 1976. – 382 с.

References

1. Lifanov I. K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislennyy eksperiment* [Method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow: Yanus, 1995, 520 p.
2. Vaynikko G. M., Lifanov I. K., Poltavskiy L. N. *Chislennye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh prilozheniya* [Numerical methods in hypersingular integral equations and applications thereof]. Moscow: Yanus-K, 2001, 508 p.
3. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. *Mechanics of Noordhoff.* 1973, vol. 1, pp. 368–425.
4. Kaya A. C., Erdogan F. *Quart. Appl. Math.* 1987, vol. 45 (1), pp. 105–122.
5. Martin P. A., Rizzo F. J. *Proc. R. Soc. A421*. 5th ed. London, 1989, pp. 341–355.
6. Martin P. A. *Proc. R. Soc. A432*. London, 1991, pp. 301–320.
7. Schulze G. W., Erdogan F. *J. Solids. Struct*. 1998, vol. 35 (28–29), pp. 3615–3634.
8. Chan Y.-S., Fannjiang A. C., Paulino G. H. *International Journal of Engineering Science*. 2003, vol. 41, pp. 683–720.
9. Gil A., Samko S. *Fraction Calculus and Applied Analysis*. 2010, vol. 13, no. 1, pp. 1–8.
10. Samko S. *Fraction Calculus and Applied Analysis*. 2011, vol. 14, no. 1, pp. 20–32.
11. Boykova A. I. Optimal'nye metody vychisleniy i ikh primenenie [Optimal methods of calculation and application thereof]. Penza: Izd-vo PenzGTU, 1996, pp. 141–148.
12. Mahiub M. A., N. M. A. Nik Long, Eshkuvatov Z. K. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2011, vol. 69, no. 3, pp. 265–274.
13. Mandal B. N., Chalrabarti A. *CRC Press. Science Publishers*. Enfield: New Hampshire, USA, 2011, 264 p.
14. Feng H., Zhang X., Li J. *BIT Numer. Math*. 2011, vol. 51, pp. 609–630.
15. Sizikov V. S. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvennonauchnykh i sotsial'nykh problem: sb. st. IX Mezhdunar. konf.* [Analytical and numerical methods of modeling natural-scientific and social problems: proceedings of IX International conference]. Penza: Izd-vo PGU, 2014, pp. 48–54.
16. Khubedzhi Sh. S. *Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie estestvennonauch-nykh i sotsial'nykh problem (20–22 maya 2015 g.): sb. st.* [Mathematical and computer modeling of natural-scientific and social problems (20-22 May 2015): collected articles]. Penza: Izd-vo PGU, 2015, pp. 134–138.
17. Sege G. *Ortogonal'nye mnogochleny* [Orthogonal polynomials]. Moscow: GIFML, 1962, 500 p.
18. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive theory of functions]. Moscow; Leningrad: GIFML, 1949, 688 p.
19. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsianal'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka, 1984, 750 p.
20. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of functional analysis]. Moscow: Nauka, 1965, 540 p.

21. Boykov I. V. *Priblizhennoe reshenie singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Approximate solutions of singular integral equations]. Penza: Izd-vo PGU, 2004, 316 p.
22. Suetin P. K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow: Nauka, 1976, 382 p.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boykov Il'ya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Бойкова Алла Ильинична
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Boykova Alla Il'inichna
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Сёмов Михаил Александрович
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Semov Mikhail Aleksandrovich
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 517.392

Бойков, И. В.

Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, М. А. Семов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 11–27.